UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Örjan Stenflo

TENTAMEN I MATEMATIK
Sannolikhetsteori I, 1MS034
2016-10-14

Skrivtid: 8–13. Varje problem ger max 5 poäng. För betygen 3,4 resp. 5 krävs 18, 25 resp. 32 poäng (inklusive eventuella bonuspoäng). Tillåtna hjälpmedel: miniräknare samt formelsamling för kursen Sannolikhetsteori I, 1MS034. Lösningarna skall vara väl motiverade och försedda med förklarande text.

1. Ur en urna med 4 röda, 4 gröna och 4 blå kulor dras slumpmässigt 4 kulor utan återläggning.

    (a) Beräkna sannolikheten att alla dragna kulor har samma färg.

    (b) Beräkna sannolikheten att det finns kulor av alla färger bland de 4 dragna kulorna.

2. (a) Visa med hjälp av Kolmogorovs sannolikhetsaxiom att

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

    för alla händelser E och F, om P är ett sannolikhetsmått.

    (b) Visa att om A och B är två oberoende händelser, så är även A^c och B^c oberoende.

3. Från en skylt med texten UPPSALA skriven med sju löstagbara bokstäver faller det plötsligt ner två slumpmässigt valda bokstäver. En vänlig analfabet sätter upp de två bokstäverna på de tomma platserna. Beräkna sannolikheten att skylten får korrekt text.

4. En nybliven bostadsrättsägare vill packa ned alla de 260 kilo med skräp som han samlat på sig under åren i källarförrådet. Källarförrådet rymmer precis 25 kartonger. Han ansätter modellen att mängden skräp (i kilo) som ryms i varje kartong är oberoende stokastiska variabler som alla är likformigt fördelade i intervallet $(8, 12)$. Bestäm approximativt sannolikheten att han lyckas.

5. Låt X och Y vara oberoende $\mathrm{Bin}(n, p)$ fördelade stokastiska variabler och låt $Z = X+Y$.

    (a) Visa att den betingade fördelningen för X givet att $Z = m$ är hypergeometrisk.

    (b) Bestäm $E(X \mid X + Y)$ och $V(X \mid X + Y)$.

Var god vänd!

6. Låt X vara en kontinuerlig stokastisk variabel som är likformigt fördelad på intervallet $[0, c]$, där c är ett positivt reellt tal. Låt $Y = \lceil X \rceil$ där $\lceil x \rceil$ betecknar det minsta heltal som är större än eller lika med $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Bestäm sannolikhetsfunktionen för Y.

   (b) Bestäm $E(Y)$.

   (En korrekt lösning av uppgiften i specialfallet $c = \pi$ ger 3 poäng.)

7. Låt $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, och $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. Använd momentgenererande funktioner och bestäm

   (a) $E(X^3)$.

   (b) $V(e^Y)$.

8. En vanlig kortlek innehåller 52 kort uppdelade på 4 färger. I varje färg finns de 13 valörerna Ess, $2, \ldots, 10$, Kn, D, K. Man drar en hand med 13 kort på måfå utan återläggning. Beräkna <u>väntevärdet</u> för antalet valörer som finns representerade i handen.