UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Örjan Stenflo

TENTAMEN I MATEMATIK
Sannolikhetsteori I, 1MS034
2017-10-25

Skrivtid: 8–13. Varje problem ger max 5 poäng. För betygen 3,4 resp. 5 krävs 18, 25 resp. 32 poäng (inklusive eventuella bonuspoäng). Tillåtna hjälpmedel: miniräknare samt formelsamling för kursen Sannolikhetsteori I, 1MS034. Lösningarna skall vara väl motiverade och försedda med förklarande text.

1. Louise ska sälja sitt hus i skärgården och hoppas få minst 7 miljoner för huset. Hon bedömer att hon kommer att lyckas med detta med sannolikhet 0.5 om det är fler än två budgivare, sannolikhet 0.1 om det är exakt två budgivare och sannolikhet 0.02 om det är färre än två budgivare. Antag att sannolikheten att det är färre än två budgivare är 0.4, sannolikheten att det är exakt två budgivare är 0.2 och att sannolikheten att det är fler än två budgivare är 0.4.

   (a) Beräkna sannolikheten att Louise lyckas.

   (b) Antag att Louise lyckas. Beräkna sannolikheten att det var fler än två budgivare.

2. I en klass med 40 elever fördelar sig födelsedagarna enligt följande tabell:

Födelsemånad	Jan	Feb	Mar	Apr	Maj	Jun	Jul	Aug	Sep	Okt	Nov	Dec
Antal	3	1	6	6	5	5	0	1	3	4	3	3

   Beräkna sannolikheten att det i en slumpmässigt vald grupp om 5 av dessa elever finns minst 2 stycken som är födda i april.
   Börja med att identifiera vilken sannolikhetsfördelning som är relevant här.

3. Låt A, B och C vara händelser med $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.7$ och $P(C) = 0.9$.

   (a) Bestäm det kortaste intervallet $[a, b]$ så att

   $$a \leq P(A \cap B \cap C) \leq b,$$

   alltid gäller.

   (b) Bestäm $P(A \cup B \cup C)$ under antagandet att händelserna A, B och C är oberoende.

Var god vänd!

4. Låt (X, Y) vara en 2-dimensionell diskret stokastisk variabel med simultan sannolikhetsfunktion

$$P(X = i, Y = j) = \begin{cases} c & \text{om } i = j = 1 \\ 2c & \text{om } i = j = 2 \\ 0 & \text{annars} \end{cases},$$

där c är en konstant.

(a) Bestäm den marginella sannolikhetsfunktionen för X.

(b) Bestäm den betingade sannolikhetsfunktionen $q(x) := P(X = x | Y = 1)$ och avgör om X och Y är oberoende.

5. Låt

$$X \sim \text{Exp}(2), \text{ och låt } \quad Z = \frac{\sum_{i=1}^{200} X_i - 100}{100},$$

där X_i har samma fördelning som X för alla $1 \leq i \leq 200$.

(a) Antag att $X_i = X$ för alla i. Bestäm täthetsfunktionen för Z.

(b) Antag att X_i är oberoende. Bestäm approximativt täthetsfunktionen för Z.

6. Låt $X \sim \text{Re}(-1, 1)$.

(a) Visa att $E[f(X)] = f(E[X])$ om $f(x) = x^3 + 1$.

(b) Visa med ett motexempel att det inte alltid gäller att $E[f(X)] = f(E[X])$ för en godtycklig funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

7. En nybörjar-roddare uppskattar att längden han kommer på ett godtyckligt årtag (mätt i enheten meter) är en viss stokastisk variabel med väntevärde 9 och varians 9. Bestäm sannolikheten att han klarar att ro 3000 meter på 325 årtag under antagandet att det inte finns några samband mellan längden på olika årtag. (Redogör som vanligt för de beteckningar, antaganden och approximationer du gör.)

8. Låt X vara en binomialfördelad stokastisk variabel med $E(X) = 4$ och $V(X) = 3$.

(a) Bestäm $P(X \leq 2)$.

(b) Bestäm $E(X^3)$.