UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Örjan Stenflo

TENTAMEN I MATEMATIK
Sannolikhetsteori I, 1MS034
2018-10-26

Skrivtid: 14–19. Varje problem ger max 5 poäng. För betygen 3,4 resp. 5 krävs 18, 25 resp. 32 poäng (inklusive eventuella bonuspoäng). Tillåtna hjälpmedel: miniräknare samt formelsamling för kursen Sannolikhetsteori I, 1MS034. Lösningarna skall vara väl motiverade och försedda med förklarande text.

1. Amanda spelar ett kortspel där hon initialt drar 5 kort från en vanlig kortlek (innehållande 4 ess och 48 andra kort).

   (a) Beräkna sannolikheten att Amanda får exakt 2 ess.

   (b) Antag att Amanda fick exakt 2 ess. Hon erbjuds möjligheten att kasta 4 kort och byta ut dessa mot 4 nya kort slumpmässigt dragna från de kort som finns kvar i kortleken. Amanda vill gärna ha så många ess som möjligt. Beräkna sannolikheten att hon totalt kommer att ha minst 2 ess om hon accepterar erbjudandet.

   Lösning:

   (a) Då antalet sätt att välja ut 2 ess och 3 andra kort är $\binom{4}{2}\binom{48}{3}$, och antalet sätt att välja ut 5 kort är $\binom{52}{5}$, blir

   $$P(\text{exakt 2 ess}) \quad = \quad \frac{\binom{4}{2}\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} \approx 0.040.$$

   (b) Efter första dragningen finns det 2 ess och 45 andra kort kvar i kortleken. Om Amanda sparar ett ess och drar 4 stycken nya kort så kommer hon att ha ett ess plus antalet dragna ess bland de nya korten om hon accepterar erbjudandet.

   $$\begin{aligned} P(\text{minst två ess}) &= P(\text{minst ett ess i andra dragningen}) \\ &= 1 - P(\text{inget ess i andra dragningen}) \\ &= 1 - \frac{\binom{2}{0}\binom{45}{4}}{\binom{47}{4}} \approx 0.165. \end{aligned}$$

2. Låt X vara en kontinuerlig stokastisk variabel med täthetsfunktion

   $$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x \leq 0 \\ 1/2 & \text{om } 0 < x < c \\ 1+c & \text{om } c \leq x < 1 \\ 0 & \text{om } x \geq 1 \end{cases},$$

   där $0 < c < 1$ är en konstant.

(a) Bestäm c så att f_X verkligen blir en täthetsfunktion.

(b) Bestäm väntevärdet $E(X)$ och variansen $V(X)$.

Lösning:

(a) Då $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = c/2 + (1-c)(1+c) = c/2 + 1 - c^2 = 1$, Måste c uppfylla ekvationen $c/2 - c^2 = c(1/2 - c) = 0$. Då $c > 0$ måste därför $c = 1/2$.

(b)

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx = \int_{-\infty}^{0} xf_X(x)dx + \int_{0}^{1/2} xf_X(x)dx + \int_{1/2}^{1} xf_X(x)dx + \int_{1}^{\infty} xf_X(x)dx \\
&= (\int_0^{1/2} xdx)/2 + 3(\int_{1/2}^{1} xdx)/2 = [x^2/4]_0^{1/2} + [3x^2/4]_{1/2}^{1} \\
&= 1/16 + 3/4 - 3/16 = 5/8.
\end{aligned}$$

Då

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_0^{1/2} x^2 f_X(x)dx + \int_{1/2}^{1} x^2 f_X(x)dx \\
&= (\int_0^{1/2} x^2dx)/2 + 3(\int_{1/2}^{1} x^2dx)/2 = [x^3/6]_0^{1/2} + [3x^3/6]_{1/2}^{1} \\
&= 1/48 + 3/6 - 3/48 = 11/24,
\end{aligned}$$

blir $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 11/24 - (5/8)^2 = 13/192 \approx 0.068$.

Anmärkning: Notera att $(X|X \leq 1/2) \sim U(0, 1/2)$ och $(X|X > 1/2) \sim U(1/2, 1)$, så alternativt om

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{om } X \leq 1/2 \\ 1 & \text{om } X > 1/2 \end{cases},$$

blir $Y \sim \text{Be}(3/4)$, $E(X|Y = 0) = 1/4$, $E(X|Y = 1) = 3/4$, och $V(X|Y = 0) = V(X|Y = 1) = (1/2)^2/12$, så vi kan beräkna väntevärde och varians som

$$E(X) = E(E(X|Y)) = \underbrace{E(X|X \leq 1/2)}_{1/4}\underbrace{P(X \leq 1/2)}_{1/4} + \underbrace{E(X|X > 1/2)}_{3/4}\underbrace{P(X > 1/2)}_{3/4} = 5/8,$$

och

$$V(X) = E(V(X|Y)) + V(E(X|Y)) = \underbrace{(1/2)^2/12}_{1/48} + \underbrace{(1/4)^3 + (3/4)^3 - (5/8)^2}_{3/64} = 13/192 \approx 0.068.$$

3. För en kontinuerlig stokastisk variabel, X, är $P(X > t) = \frac{1}{t^2}$ för alla $t \geq 1$.

   (a) Bestäm täthetsfunktionen för X.

(b) Avgör om X har samma väntevärde som median.

Lösning:

(a) Då fördelningsfunktionen för X ges av

$$F_X(t) = P(X \leq t) = 1 - P(X > t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{t^2}, & \text{om } t \geq 1 \\ 0 & \text{annars,} \end{cases}$$

och täthetsfunktion $f_X(t)$ är derivatan av fördelningsfunktionen i alla punkter t där derivatan existerar, blir täthetsfunktionen

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{2}{t^3}, & \text{om } t > 1 \\ 0 & \text{annars .} \end{cases}$$

(b) Nej,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t) dt = \int_1^{\infty} \frac{2}{t^2} dt = 2,$$

men medianen för X är $\sqrt{2}$, ty $P(X > t) = 1/2$ om $t = \sqrt{2}$.

4. Den stokastiska variabeln X är normalfördelad med

$$P(X < 1) = P(X > 1)$$

(a) Bestäm $P(X = 1)$.

(b) Antag att $P(X > 2) = 0.25$. Bestäm $P(X > 3)$.

Lösning:

(a) $P(X = 1) = 0$, eftersom X är en kontinuerlig stokastisk variabel.

(b) Från normalfördelningens symmetri följer att $E(X) = 1$, så $X \sim \mathrm{N}(1, \sigma^2)$ för något $\sigma > 0$. Då

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) = 1 - P\left(\frac{X-1}{\sigma} \leq \frac{1}{\sigma}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) = 0.25, \end{aligned}$$

är $\frac{1}{\sigma} = \lambda_{0.25}$, där $\lambda_{0.25} \underbrace{\approx}_{\text{tabell}} 0.6745$ betecknar den övre kvartilen hos $N(0,1)$ fördelningen. Detta ger

$$\begin{aligned} P(X > 3) &= 1 - P(X \leq 3) = 1 - P\left(\frac{X-1}{\sigma} \leq \frac{2}{\sigma}\right) \\ &= 1 - \Phi(\underbrace{2\lambda_{0.25}}_{\approx 1.349}) \underbrace{\approx}_{\text{tabell}} 1 - 0.91 = 0.09. \end{aligned}$$

5. Den tvådimensionella stokastiska variabeln (X, Y) har simultan täthetsfunktion

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1/2 & \text{om } (x,y) \in T \\ 0 & \text{annars} \end{cases},$$

där T är triangeln som begränsas av linjerna $x = 0$, $y = 0$ och $y = 2 - x$.

(a) Beräkna de marginella täthetsfunktionerna för X och Y.

(b) Är X och Y oberoende? Svaret ska motiveras.

Lösning:

(a) Observera att $f_{X,Y}(x,y) = 0$ om $y < 0, x < 0$ eller $y > 2 - x$ (dvs $x > 2 - y$).

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_{-\infty}^{0} 0dy + \int_{0}^{2-x} \frac{dy}{2} + \int_{2-x}^{\infty} 0dy = 1 - \frac{x}{2},\ 0 \leq x \leq 2 \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dy + \int_{0}^{2-y} \frac{dx}{2} + \int_{2-y}^{\infty} 0dy = 1 - \frac{y}{2},\ 0 \leq y \leq 2. \end{aligned}$$

(b) X och Y är inte oberoende, ty om de vore det skulle $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. Ett mer direkt motexempel är: $P(X > 1) = P(Y > 1) = \int_1^{\infty}(1 - \frac{t}{2})dt \neq 0$, men $P(X > 1, Y > 1) = \int_1^{\infty}\int_1^{\infty} 0dxdy = 0$. Således är

$$P(X > 1, Y > 1) \neq P(X > 1)P(Y > 1).$$

6. En vanlig (6 sidig) tärning kastas N gånger där N är en stokastisk variabel med $P(N = k) = 2^{-k}$, $k \geq 1$. Låt S beteckna ögonsumman och beräkna

(a) $P(S = 3)$

(b) $P(N = 2 \mid S = 3)$

(c) $P(S = 3 \mid N \text{ udda})$

Lösning:

(a) Vi har $P(S = 3|N = 1) = P(\text{trea}) = 1/6$, $P(S = 3|N = 2) = P(\text{först etta, sedan tvåa}) + P(\text{först tvåa, sedan etta}) = 2/36$, $P(S = 3|N = 3) = P(\text{3 ettor på 3 kast}) = (1/6)^3 = 1/216$, och $P(S = 3|N = k) = 0$, om $k > 3$. Enligt lagen om total sannolikhet är

$$\begin{aligned} P(S = 3) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(S = 3|N = k)P(N = k) \\ &= \frac{1}{6} \cdot 2^{-1} + \frac{2}{36} \cdot 2^{-2} + \frac{1}{216} \cdot 2^{-3} = \frac{169}{1728} \approx 0.098. \end{aligned}$$

(b)

$$P(N = 2|S = 3) = \frac{P(S = 3|N = 2)P(N = 2)}{P(S = 3)} = \frac{\frac{2}{36} \cdot 2^{-2}}{(169/1728)} = \frac{24}{169} \approx 0.142.$$

(c)

$$\begin{aligned}
P(S=3|\ N \text{ udda}) &= \frac{P(S=3, N=1)+P(S=3, N=3)}{P(N \text{ udda})} \\
&= \frac{P(S=3, N=1)+P(S=3, N=3)}{\sum_{k\geq 0} 2^{-(2k+1)}} \\
&= \frac{\frac{1}{6}\cdot 2^{-1}+\frac{1}{216}\cdot 2^{-3}}{2^{-1}\sum_{k\geq 0} 4^{-k}} = \frac{\frac{1}{6}\cdot 2^{-1}+\frac{1}{216}\cdot 2^{-3}}{(2/3)} = \frac{145}{1152} \approx 0.126.
\end{aligned}$$

7. Låt $X \sim \mathrm{Bin}(7, 1/2)$.
   (a) Bestäm $E(X^3)$.
   (b) Beräkna $P(5 < X^3 < 29)$.

   Lösning:

   (a) Då $X \sim \mathrm{Bin}(7, 1/2)$, är $P(X=k) = \binom{7}{k}(1/2)^7$, så

$$\begin{aligned}
E(X^3) &= \sum_{k=0}^{7} k^3 P(X=k) \\
&= (1/2)^7 \sum_{k=0}^{7} k^3 \binom{7}{k} = \frac{1^3\cdot 7+2^3\cdot 21+3^3\cdot 35+4^3\cdot 35+5^3\cdot 21+6^3\cdot 7+7^3}{128} \\
&= \frac{7840}{128} = \frac{245}{4} = 61.25.
\end{aligned}$$

   Alternativt, då X har momentgenererande funktion (se formelsamling)

$$\Psi_X(t) = (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^t)^7,$$

   blir

$$\Psi_X^{(1)}(t) = \frac{7e^t}{2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^t)^6,$$

$$\Psi_X^{(2)}(t) = \Psi_X^{(1)}(t) + \frac{42e^{2t}}{4}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^t)^5,$$

   och

$$\Psi_X^{(3)}(t) = \Psi_X^{(2)}(t) + \frac{84e^{2t}}{4}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^t)^5 + \frac{210e^{3t}}{8}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^t)^4,$$

   så $E(X^3) = \Psi_X^{(3)}(0) = \Psi_X^{(1)}(0) + \frac{42}{4} + \frac{84}{4} + \frac{210}{8} = \frac{14+42+84+105}{4} = \frac{245}{4}$.

   (b) $P(5 < X^3 < 29) = P(X=2) + P(X=3) = \binom{7}{2}(1/2)^7 + \binom{7}{3}(1/2)^7 = \frac{7}{16} = 0.4375$.

8. Låt X_1, X_2,… vara en följd av oberoende stokastiska variabler med $X_i \sim \mathrm{Re}(0,1)$, för alla $i \geq 1$. Bestäm

$$\lim_{n\to\infty} P(e^{\sqrt{n}}(X_1 X_2 \cdots X_n)^{1/\sqrt{n}} \leq 5).$$

Ledning: Om $X \sim \mathrm{Re}(0,1)$, så är $E(\ln X) = -1$ och $V(\ln X) = 1$.

Lösning: Låt $Y_n = e^{\sqrt{n}}(X_1 X_2 \cdots X_n)^{1/\sqrt{n}}$. Då

$$\ln Y_n = \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \ln X_i,$$

och $\ln X_i$ är oberoende och likafördelade, följer enligt CGS att

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^n \ln X_i - E(\sum_{i=1}^n \ln X_i)}{D(\sum_{i=1}^n \ln X_i)} \leq x \right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^n \ln X_i + n}{\sqrt{n}} \leq x \right) \to \Phi(x),$$

då $n \to \infty$. Alltså måste

$$F_{Y_n}(x) = P(Y_n \leq x) = P(\ln Y_n \leq \ln x) \to \Phi(\ln x),$$

då $n \to \infty$, för alla $x > 0$, där Φ betecknar fördelningsfunktionen för en $\mathrm{N}(0,1)$ fördelad stokastisk variabel. Speciellt är därför $\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(5) = \Phi(\ln 5) \approx \Phi(1.61) \approx 0.946$.