UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Örjan Stenflo

TENTAMEN I MATEMATIK
Sannolikhetsteori I, 1MS034
2021-10-25

Skrivtid: 8–13. Varje problem ger max 5 poäng. För betygen 3,4 resp. 5 krävs 18, 25 resp. 32 poäng (inklusive eventuella bonuspoäng). Tillåtna hjälpmedel: miniräknare samt formelsamling för kursen Sannolikhetsteori I, 1MS034. Lösningarna skall vara väl motiverade och försedda med förklarande text.

1. För två händelser A och B i ett utfallsrum Ω gäller $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.4$, och $P(A \cup B) = 0.5$.

   (a) Bestäm $P(A|B)$.

   (b) Låt $X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{om } \omega \in A \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$ och $Y(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{om } \omega \in B \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$.
   Bestäm korrelationskoefficienten $\rho(X, Y)$.

2. Låt X vara en stokastisk variabel med sannolikhetsfunktion:

$$p_X(k) = P(X = k) = \begin{cases} \alpha & k = 1, 3 \\ \alpha\beta & k = 4 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases},$$

   där $\alpha > 0$ och $\beta > 0$ är konstanter.

   (a) Bestäm ett samband mellan α och β så att detta verkligen är en sannolikhetsfunktion.

   (b) Antag att $E(X) = 3$. Bestäm exakta värden på α och β samt beräkna variansen av X.

3. Man har fyra kulor. Varje kula färgas vit med sannolikhet 1/2 och röd med sannolikhet 1/2 oberoende av varandra och placeras sedan i en urna som blandas om. Ur urnan drar man sedan fyra kulor med återläggning mellan varje dragning. Beräkna den betingade sannolikheten att alla kulor i urnan är vita givet att alla dragna kulor är vita.

4. Låt N vara antalet tärningskast man behöver göra tills man fått 6:a 1000 gånger. Beräkna approximativt

$$P(|N - 6000| < 300).$$

Var god vänd!

5. Från en fruktskål med 2 äpplen 8 päron och 8 apelsiner tar man slumpmässigt 3 frukter.

   (a) Beräkna sannolikheten att minst en av de 3 tagna frukterna är ett päron.

   (b) Låt X beteckna antalet olika fruktsorter som finns bland de 3 tagna frukterna. Beräkna $E(X)$.

6. Låt X och Y vara oberoende Exp(1)-fördelade stokastiska variabler och definiera $Z = X + Y$.

   (a) Bestäm den momentgenererande funktionen för Z.

   (b) Bestäm $E(Z^3)$.

7. I land 1 är kroppslängden hos invånarna (i cm) normalfördelad med väntevärde 165 och varians 49 och i land 2 är kroppslängden hos invånarna (i cm) normalfördelad med väntevärde 175 och varians 64. Antag att man slumpmässigt väljer ut 3 invånare från land 1 och 2 invånare från land 2. Låt Z beteckna kroppslängden av den längsta bland de 5 utvalda invånarna.

   (a) Bestäm fördelningsfunktionen för Z.

   (b) Bestäm approximativt 0.05-kvantilen för Z.

8. Låt $X_1, X_2, X_3, \ldots$ vara oberoende och lika fördelade, med väntevärde 0 och varians 1. Antag vidare att det finns ett $h > 0$ så att den momentgenererande funktionen $\psi_{X_1}(t)$ är ändlig för $|t| < h$.

   Vad säger centrala gränsvärdessatsen i denna situation

   (a) i. formulerad i termer av fördelningsfunktioner?

       ii. formulerad i termer av momentgenererande funktioner?

   (b) Ge ett bevis av det senare. (Du kan anta att Taylorutvecklingen $\psi_{X_1}(t) = 1 + E(X_1)t + E(X_1^2)t^2/2 + O(t^3)$ gäller då $t \to 0$.)