UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Örjan Stenflo

TENTAMEN I MATEMATIK
Sannolikhetsteori I, 1MS034
2021-12-22

Skrivtid: 8–13. Varje problem ger max 5 poäng. För betygen 3,4 resp. 5 krävs 18, 25 resp. 32 poäng (inklusive eventuella bonuspoäng). Tillåtna hjälpmedel: miniräknare samt formelsamling för kursen Sannolikhetsteori I, 1MS034. Lösningarna skall vara väl motiverade och försedda med förklarande text.

1. I en urna finns 8 gröna, 6 blå och 4 vita bollar. Antag att man plockar 4 bollar från urnan.

   (a) Beräkna sannolikheten att alla de 4 plockade bollarna har samma färg.

   (b) Beräkna sannolikheten att det finns minst en boll av alla färger bland de 4 plockade bollarna.

2. (a) Ange Kolmogorovs sannolikhetsaxiom.

   (b) Använd Kolmogorovs sannolikhetsaxiom för att visa att om E och F är två händelser där F alltid inträffar om E inträffar, så är sannolikheten för E uppåt begränsad av sannolikheten för F.

3. Låt X och Y vara två oberoende stokastiska variabler där $X \sim \mathrm{Bin}(5, 0.1)$ och $Y \sim \mathrm{Bin}(10, 0.2)$. Låt $Z = 2X + Y$.

   (a) Bestäm väntevärde och varians för Z.

   (b) Bestäm $P(Z = 2)$.

4. Vid ett genetiskt korsningsförsök uppträder 3 varianter: A, B och C, med sannolikheterna 1/9, 4/9 och 4/9 respektive. Avkommorna till variant A är alltid gröna, medan avkommorna till variant B är gröna med sannolikhet 3/4 och till variant C gröna med sannolikhet 9/16.

   (a) Beräkna sannolikheten att en slumpmässigt vald planta ger en grön avkomma.

   (b) Om avkomman är grön, vad är då sannolikheten att den kommer från A, B respektive C?

Var god vänd!

5. Använd den centrala gränsvärdessatsen för att visa att

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^k}{k!} = 0.5.$$

6. Den 2-dimensionella stokastiska variabeln (X, Y) har täthetsfunktion

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-x} & \text{för } 0 < y < x \\ 0 & \text{annars} \end{cases}.$$

(a) Beräkna de marginella täthetsfunktionerna för X och Y.

(b) Är X och Y oberoende? Svaret ska motiveras.

7. En stokastisk variabel sägs vara chitvåfördelad med n frihetsgrader, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$, om dess momentgenererande funktion är definierad för alla $t < 1/2$ och given av

$$\psi(t) = (1 - 2t)^{-n/2}.$$

(a) Låt $Y = X_1 + X_2$ där X_1 och X_2 är två oberoende chitvåfördelade stokastiska variabler med n_1 respektive n_2 frihetsgrader.

Visa att Y är chitvå-fördelad med $n_1 + n_2$ frihetsgrader.

(b) Använd den momentgenererande funktionen för att härleda väntevärdet och variansen av en chitvåfördelad stokastisk variabel med n frihetsgrader.

8. Låt $X_n \sim \text{Geo}(\frac{\lambda}{\lambda+n})$ och bilda $Y_n = \frac{X_n}{n}$. Bestäm gränsfördelningen för Y_n då $n \to \infty$.