Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Marcus Vaktnäs

Tentamen i Matematik
Sannolikhetsteori 1, 1MS034
2022-10-28

Skrivtid: 5 timmar. Tillåtna hjälpmedel: miniräknare och formelsamlingen. Varje uppgift ger som mest 5 poäng. Maxpoäng är 40, plus 2 möjliga bonuspoäng från inlämningsuppgifter. 18-24 ger betyg 3, 25-31 ger betyg 4, och 32-42 ger betyg 5. Lycka till!

1. Låt A, B och C vara händelser i ett sannolikhetsrum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med $P(B \cap C) > 0$.

a) Visa att $P(B) > 0$.

b) Visa att $P(A^c \mid B) = 1 - P(A \mid B)$.

c) För sannolikhetsmåttet $Q(A) = P(A \mid B)$, visa att $Q(A \mid C) = P(A \mid B \cap C)$.

2. Den tvådimensionella slumpvariabeln (X, Y) har simultan täthetsfunktion $f_{X,Y}(x, y) = cx$ för $x, y \in [0, 1]$ och $f_{X,Y}(x, y) = 0$ annars.

a) Bestäm c.

b) Bestäm de marginella täthetsfunktionerna till X och Y.

c) Bestäm kovariansen $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

3. En apa spelar en rad på stryktipset varje vecka. En tipsrad består av 13 fotbollsmatcher där apan på varje match fyller i 1, X eller 2.

a) Hur länge kommer det ta i genomsnitt (medelvärde) för apan att få minst 12 rätt på en rad?

b) Hur länge måste apan leva för att den ska ha minst 90% chans att få minst 12 rätt under sin livstid?

4. Låt $X \sim \mathrm{N}(0, 1)$ och $Y \sim \mathrm{N}(0, 1)$ vara oberoende slumpvariabler.

a) Använd faltningsformlerna för att hitta fördelningen till $X + Y$.

b) Använd genererande funktioner för att hitta fördelningen till $X + Y$.

5. Kasta ett mynt 50 gånger och skriv p för sannolikheten att myntet landade på krona minst 30 ggr.

a) Använd Chebyshevs olikhet för att visa att $p \leq 1/4$.

b) Använd en noggrant utvald tabell för att approximera p.

6. Kasta en symmetrisk tärning med n sidor till någon sida dykt upp två gånger. Låt X_n vara antalet kast som behövs. Bestäm fördelningsfunktionen till X_n och visa att gränsfördelningen till $X_n/\sqrt{n}$ är $\sqrt{X}$ där $X \sim \mathrm{Exp}(1/2)$.

Ledning: För att hitta gränsfördelningen, beräkna $\lim_{n\to\infty} \log P(X_n/\sqrt{n} > t)$ genom att använda Taylorutvecklingen $\log(1 - x) = -x + \mathcal{O}(x^2)$ när $x \to 0$, och använd er av att

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

7. Vi skriver $X \sim Y$ om X och Y har samma fördelning. Avgör om följande påståenden om diskreta slumpvariabler är sanna eller falska. Om ett givet påstående är sant, förklara varför, och om falskt, ge ett motexempel.

a) Om $P(X > 0) = 1$ så är $X > 0$.

b) Om $X > 0$ så är $EX > 0$.

c) Om $X_1 \sim X_2$ och $Y_1 \sim Y_2$ så är $X_1 + Y_1 \sim X_2 + Y_2$.

d) Om $X \sim Y$ så är $cX \sim cY$ för alla $c \in \mathbb{R}$.

e) Om $X \sim Y$ så är $EX = EY$.

8. Hitta diskreta slumpvariabler $X_1, X_2, \ldots$ som bara antar värden i $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ så att följande påståenden stämmer.

a) $EX_1 = 1$ och $\mathrm{Var}(X_1) = 32$.

b) $EX_2 < \infty$ och $\mathrm{Var}(X_2) = \infty$.

c) $\mathrm{Cov}(X_3, X_4) = 0$ men X_3 och X_4 är beroende.

d) $P(X_5 > m + n \mid X_5 > m) = P(X_5 > n)$ för alla $m \in \mathbb{N}$ och $n \in \mathbb{N}$.

e) $\lim_{n\to\infty} EX_n = \infty$ men $\lim_{n\to\infty} P(X_n \geq \epsilon) = 0$ för varje $\epsilon > 0$.