Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Marcus Vaktnäs

Tentamen i Matematik

Sannolikhetsteori 1, 1MS034
2023-08-26

Skrivtid: 5 timmar. Tillåtna hjälpmedel: miniräknare och formelsamlingen. Varje uppgift ger som mest 5 poäng. Maxpoäng är 40. 18-24 ger betyg 3, 25-31 ger betyg 4, och 32-40 ger betyg 5. Lycka till!

1. En vanlig kortlek består av 52 kort med 13 valörer i 4 olika färger. En hand består av 5 kort.

a) Vad är sannolikheten att få färgstege (5 kort i numerisk ordning och samma färg)?

b) Vad är sannolikheten att få stege (5 kort i numerisk ordning men inte färgstege)?

c) Vad är sannolikheten att få kåk (3 av en valör och 2 av en annan valör)?

2. Formulera lagen om total sannolikhet och bevisa satsen med hjälp av Kolmogorovs axiom.

3. Låt $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ och $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$ vara oberoende slumpvariabler.

a) Hitta fördelningen till $X + Y$.

b) Hitta fördelningen till $\min\{X, Y\}$.

4. En tipsrad på stryktipset består av 13 fotbollsmatcher. Kaj spelar en rad stryktipset varje lördag och är en erfaren tippare med 70% chans att gissa rätt på varje match.

a) Beräkna exakt hur länge Kaj som minst behöver spela för att ha minst 90% chans att ha fått 13 rätt på minst en rad.

b) Beräkna exakt hur länge Kaj som minst behöver spela för att ha minst 90% chans att ha fått 13 rätt på minst 2 olika rader.

5. Denna uppgift fortsätter från den förra. Kaj har nu som mål att få 13 rätt 10 gånger.

a) Beräkna approximativt sannolikheten att Kaj nått sitt mål efter 1000 veckor.

b) Beräkna approximativt hur många veckor Kaj som minst behöver spela för att ha nått sitt mål med minst 90% chans.

6. Kasta ett mynt oupprepat och låt X vara antalet kast som behövdes för att få den första kronan. Låt $X_n = 1$ om n:te kastet ger krona, och $X_n = 0$ om n:te kastet ger klave. Hitta fördelningen till $E(X \mid X_1)$ och $E(X \mid X_2)$. Vad blir $\lim_{n\to\infty} E(X \mid X_n)$?

7. Låt $X_n \sim \text{Bin}(n, \lambda/n)$ för $n > \lambda > 0$. Visa att X_n konvergerar i fördelning mot $\text{Po}(\lambda)$. √

8. Låt $\Omega = \{a, b, c, d\}$ med likformig sannolikhet. Ge exempel på icke-konstanta slumpvariabler X och Y på Ω så att

a) X och Y är oberoende och likafördelade.

b) X och Y är beroende och likafördelade. √

c) X och Y är oberoende men inte likafördelade.